

INFLUENCE DES VARIATIONS DES PROPRIETES PHYSIQUES ET DE LA STRATIFICATION EN CONVECTION NATURELLE

J.-M. PIAU

Laboratoire de Mécanique Expérimentale des Fluides, Bâtiment 502, Centre Universitaire, 91405 Orsay, France

(Reçu le 19 Juillet 1973)

Résumé—Cet article concerne la convection naturelle stationnaire le long d'une plaque plane verticale.

En régime laminaire, on a étudié l'influence des variations des propriétés physiques avec la température et de la stratification du fluide. Les calculs concernent les liquides; les essais ont été effectués avec de l'eau.

La transition au régime turbulent a été étudiée expérimentalement. On montre l'influence des variations de la viscosité avec la température, ainsi que celle de la stratification du fluide sur le nombre de Rayleigh critique. On cherche à interpréter cette influence à la fois pour les liquides et les gaz.

NOTATIONS

$A, B,$	constantes;
$C_p,$	chaleur spécifique;
$F,$	fonction de similitude liée aux vitesses;
$G,$	fonction de similitude liée aux températures;
$G_{x_1},$	nombre de Grashof local;
$L,$	longueur de référence;
$LT,$	passage laminaire-transition;
$M,$	ensemble des paramètres caractérisant les variations de propriétés physiques;
$M_0,$	restriction de M aux variations de viscosité;
$Nu_{x_1},$	nombre de Nusselt local;
$P,$	nombre de Prandtl;
$Ra,$	nombre de Rayleigh;
$T,$	température;
$TT,$	passage transition-turbulent;
$Y,$	variable de similitude;
$a, b,$	variations réduites de β et de μ ;
$f_\infty,$	valeur de F pour Y grand;
$g,$	pesanteur;
$m,$	exposant caractéristique pour les gaz;
$q,$	exposant de la loi de température de paroi;
$t,$	temps;
$u_1 u_2 u_3,$	composantes de la vitesse;
$Ox_1 x_2 x_3,$	repère.

Lettres grecques

$\beta,$	coefficient de dilatation;
$\theta,$	température réduite;
$\lambda,$	conductibilité thermique;
$\mu,$	viscosité;
$\rho,$	masse volumique;
$\psi,$	fonction de courant.

Indices

0 ou $1,$	référence, non précisée;
$\infty,$	dans le fluide libre;
$p,$	à la paroi;
$m,$	à la température de film $\frac{T_p + T_\infty}{2}$;
$x_1,$	local, à l'abscisse x_1 .

I. INTRODUCTION

CETTE étude, qui résume certains chapitres d'une thèse [1], se rapporte au cas particulier bidimensionnel de la plaque plane verticale chauffante, à des nombres de Grashof suffisants pour que la théorie de la couche limite s'applique. On sait [2, 3] qu'on peut distinguer trois zones dans un tel écoulement, lorsqu'on s'éloigne du bord d'attaque de la plaque tout en restant dans son plan: la zone laminaire, une très longue zone de transition, puis la zone de régime turbulent développé. Par la suite nous appellerons transition LT le passage de la zone laminaire à la zone de transition, et transition TT le passage de la zone de transition à la zone turbulente. Nos calculs et expériences concernent le cas des liquides et plus particulièrement celui de l'eau. Néanmoins, dans l'étude de la transition nous envisageons aussi le cas des gaz.

Pour interpréter avec précision des expériences en régime laminaire il faut prendre en considération à la fois les variations de température de la paroi chauffante sur une verticale, les variations de température du fluide libre sur une verticale que nous appellerons stratification, et les variations des propriétés physiques du fluide avec la température. Le premier de ces problèmes a déjà été traité [1, 4] aussi bien pour les

liquides que pour les gaz. Dans la suite de cet article nous allons nous intéresser aux deux autres qui jouent un rôle important dans l'apparition de la transition, comme nous le verrons.

Il faut prendre en compte les paramètres qui traduisent les variations des propriétés physiques du fluide avec la température, lorsque l'écart de température entre la plaque et le fluide libre devient important. E. M. Sparrow [5] a étudié le cas des gaz et du mercure. La seule étude que nous connaissons pour les autres liquides est celle de A. Fortier [6] qui considère les variations de la viscosité μ avec la température. Il montre en négligeant les termes d'inertie et pour de petites variations de μ qu'on doit trouver un nombre de Nusselt à peu près exact en utilisant les formules obtenues à propriétés physiques constantes et en prenant les propriétés physiques à la température de film. Cette étude peut s'appliquer aux huiles. Pour notre part nous considérerons à la fois les variations de la viscosité et du coefficient de dilatation et nous conserverons les termes d'inertie.

La convection naturelle le long d'une plaque verticale est étudiée, en général, en supposant la plaque plongée dans un réservoir infini de liquide, dont la température reste constante loin de la plaque sur une horizontale, aussi bien que sur une verticale. Mais nous verrons que les variations de la température sur une verticale, loin de la plaque, peuvent modifier nettement l'écoulement. R. Cheesewright [7] a montré qu'il existe des solutions affines dans le cas de la plaque isotherme dans une ambiance à $T_\infty(x_1)$, où la fonction T_∞ est une fonction puissance ou une fonction exponentielle de x_1 , ou lorsque $T_p(x_1) - T_\infty(x_1)$ est une constante. Il donne des résultats numériques dans le cas de l'air pour la plaque isotherme dans une ambiance à $T_\infty(x_1)$ fonction puissance de x_1 . Il trouve alors que les variations de la température selon x_2 peuvent passer par un minimum. On ne connaît pas de résultats expérimentaux sur ce sujet. Après avoir repris l'étude théorique du problème, nous allons en donner, ce qui démontrera en particulier la réalité de l'existence du minimum de température.

Pour les grands nombres de Rayleigh, l'écoulement n'est plus laminaire, le nombre de Nusselt n'est plus donné par les formules de la couche limite laminaire, et l'un des problèmes qui se pose est la délimitation exacte des diverses zones d'écoulement. Leurs limites varient autour d'une valeur moyenne et paraissent difficiles à déterminer par visualisation. Il semble plus sûr d'utiliser le graphique du nombre de Nusselt moyen fonction des nombres de Rayleigh ou de Grashof. On peut trouver ce graphique avec quelques détails dans les articles de T. Fujii [8] pour l'eau et l'huile à T_p ou à flux constant, de Vliet [3] pour l'eau à flux constant, et dans le rapport de Hugot [9]. A l'aide de ces résultats

puis de ceux de nos propres expériences nous avons cherché à délimiter la transition. Enfin nous essayons de donner une interprétation aux variations de ses limites à partir de nos calculs en régime laminaire: l'écoulement serait stabilisé par les phénomènes qui l'accélèrent au voisinage de la paroi.

II. LES PROPRIETES PHYSIQUES DES LIQUIDES

Le mouvement du fluide, en convection naturelle, dépend beaucoup de ses propriétés physiques et de leurs variations avec la température.

1. Masse volumique

La masse volumique ρ varie avec la température, et on introduit un coefficient de dilatation β à la température T :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$$

qui, en général, dépend assez peu de la température pour qu'on puisse écrire:

$$\rho_T = \rho_{T_0}(1 - \beta(T - T_0)).$$

Mais dans le cas particulier de l'eau β varie beaucoup avec la température et dans cette dernière formule β est un coefficient qui dépend de T et T_0 .

A l'aide des valeurs de ρ données pour l'eau dans les tables [10] on a calculé:

$$\beta(T_0, T) = \frac{\rho_T - \rho_{T_0}}{\rho_{T_0}(T - T_0)}$$

pour

$$T_0 = 20^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad \beta(T_0) = \lim_{T \rightarrow T_0} \beta(T, T_0).$$

D'après les résultats portés Figs. 1 et 2, on voit que $\beta(T_0, T)$ varie à peu près linéairement avec T et que $\beta(T_0)$ croît de 88 pour cent entre 20 et 60°C.

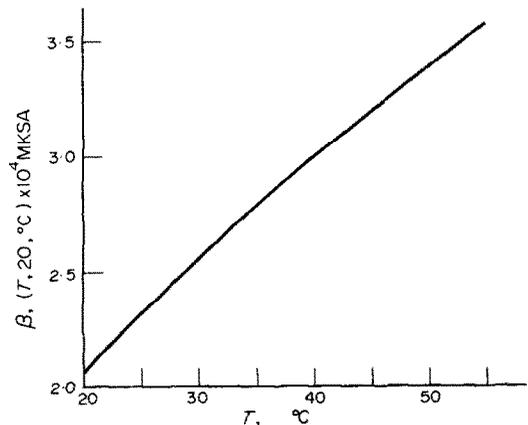


FIG. 1. Valeurs calculées pour l'eau d'après [10].

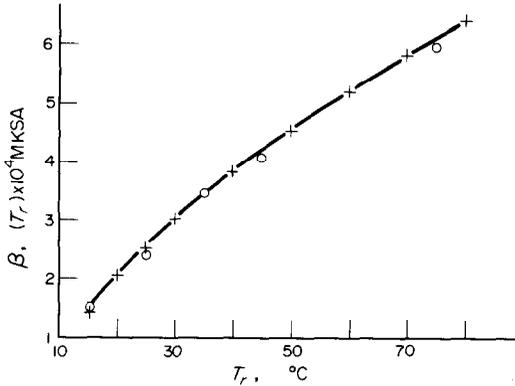


FIG. 2. Coefficient de dilatation de l'eau. + valeurs calculées d'après [10]; O valeurs moyennes [6].

2. Viscosité

La viscosité μ de l'eau [10] décroît rapidement avec la température: 74 pour cent entre 20 et 60°C. Ses variations peuvent être représentées à l'aide d'une loi de type hyperbolique.

$$\mu_T = \frac{\mu_{T_0}}{1 + s(T - T_0)}$$

Cependant pour des écarts de température limités à 20°C on a une assez bonne approximation de $\mu(T)$ avec une loi linéaire:

$$\mu_T = \mu_{T_0}(1 - p(T - T_0)).$$

On peut faire les mêmes observations pour beaucoup de liquides usuels.

3. Autres propriétés

La chaleur spécifique C_p varie en général assez peu avec la température [10]. Ainsi pour l'eau elle varie de 0,6 pour cent entre 20 et 60°C.

Les variations de la conductibilité thermique λ des liquides avec la température est relativement modérée. Pour l'eau [11] la conductibilité thermique varie de 8 pour cent entre 20 et 60°C.

III. LES EQUATIONS DU MOUVEMENT

Le mouvement du fluide est rapporté au repère orthonormé $0x_1x_2x_3$ tel que $0x_1$ soit vertical dans le plan de la plaque plane, $0x_2$ perpendiculaire à celle-ci dirigé vers le fluide libre, $0x_3$ étant le long du bord d'attaque de la plaque supposée infiniment mince.

La température absolue du fluide est T . Elle prend les valeurs $T_p(x_1)$ le long de la paroi chauffante et $T_\infty(x_1)$ au loin de cette paroi. Les composantes de la vitesse du fluide par rapport aux axes $0x_1x_2x_3$ sont respectivement u_1, u_2, u_3 , sa pression est p , sa masse volumique ρ , sa chaleur spécifique C_p et sa conductibilité thermique λ .

Les équations générales du mouvement et les conditions aux limites s'écrivent alors:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) &= -\rho g \frac{\partial x_1}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi + \frac{Dp}{Dt} \\ x_2 = 0 \quad u_i = 0 \quad T &= T_p(x_1) \\ x_2 \rightarrow \infty \quad u_i \rightarrow 0 \quad T &\rightarrow T_\infty(x_1) \end{aligned} \right.$$

où t est le temps, τ_{ij} la composante courante du tenseur des contraintes de viscosité, Φ la fonction de dissipation, p la pression, g l'accélération de la pesanteur.

L'action de la pesanteur sur le fluide de masse volumique variable ρ , qui crée le mouvement s'exprime par le terme $\rho g (\partial x_1 / \partial x_i)$. En général on néglige les termes de dissipation visqueuse Φ et Dp/Dt de l'équation de l'énergie. Le problème de la plaque plane verticale chauffante que nous étudions est un problème bidimensionnel. On sait alors que dans l'approximation de la couche limite p ne varie qu'avec x_1 , et l'on en déduit la relation:

$$-\rho g \frac{\partial x_1}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho_\infty \beta (T - T_\infty) g \frac{\partial x_1}{\partial x_i}$$

On introduit un certain nombre de paramètres sans dimension, en mettant les équations sous forme adimensionnelle. Pour les fluides newtoniens de viscosité μ la solution dépend:

— du nombre de Prandtl $P = \frac{\mu C_p}{\lambda}$

— du nombre de Grashof local

$$G_{x_1} = \frac{\rho^2 g \beta (T_p - T_\infty) x_1^3}{\mu^2}$$

— d'un certain nombre de paramètres représentant les variations des propriétés physiques avec la température, les variations de T_p et T_∞ avec x_1 .

On suppose le nombre de Grashof suffisant pour faire les approximations usuelles de la couche limite bidimensionnelle, qui permettent de réduire le nombre des équations et le nombre des termes dans chacune des équations restantes. On introduit alors une fonction de courant ψ telle que

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad u_2 = - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

de sorte que l'équation de continuité soit toujours satisfaite.

Ensuite pour se ramener à la résolution d'un système d'équations différentielles, on cherche des solutions affines. Pour cela on a utilisé la méthode des groupes de transformation telle qu'elle est rappelée par Poulain [12] ou Ames [13]. On n'a utilisé qu'un seul des deux groupes de transformations qu'on a l'habitude d'introduire: celui qui correspond à des conditions aux limites en x^2 , parce qu'il convient pour les expériences. Nous passons complètement sous silence les solutions qu'on obtient aussi aisément avec le groupe en $\exp(\alpha x)$, bien qu'au départ nous ayons aussi fait des calculs dans ce cas [1].

Les équations différentielles ont été ensuite résolues sur calculateur. Au début de cette étude nous disposions d'un calculateur analogique Analac (CSF) donnant dans le meilleur cas une précision de 5 pour mille. Ensuite nous avons pu utiliser un ordinateur.

IV. INFLUENCE DES VARIATIONS DES PROPRIETES PHYSIQUES EN CONVECTION NATURELLE LAMINAIRE, LE LONG D'UNE PLAQUE ISOTHERME, DANS UN LIQUIDE

Nous avons vu que parmi les propriétés physiques des liquides, ce sont la viscosité μ et le coefficient de dilatation β qui varient le plus avec la température. Nous les écrivons sous la forme:

$$\mu(T) = \mu_m(T_m)b(T) \quad \text{et} \quad \beta(T, T_\infty) = \beta_m(T_m, T_\infty)a(T)$$

où T_m est la demi somme de la température du fluide libre T_∞ et de la température de la paroi T_p supposées constantes.

1. Solutions semblables

On montre qu'il existe des solutions semblables pour le problème de couche limite bidimensionnelle, à condition que T_∞ et T_p soient bien indépendantes de x_1 .

Les longueurs étant rapportées à L et les vitesses à $\sqrt{g\beta_m L(T_p - T_\infty)}$, on introduit une fonction de courant

ψ adimensionnelle, et on pose:

$$Y = \left(\frac{3P_m G_{mx_1}}{4}\right)^{1/4} \frac{x_2}{x_1}, \quad \psi = x_1^{3/2} \left(\frac{3P_m}{4}\right)^{-3/4} G_{mx_1}^{-1/4} F$$

et

$$\theta = G = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty},$$

où T est la température courante, G_{mx_1} est le nombre de Grashof local à l'abscisse x_1 . L'indice m rappelle que les propriétés sont calculées à la température T_m . On devra résoudre

$$a(G)G + (b(G)F'')' = \frac{1}{P_m} (\frac{2}{3}F'^2 - FF''),$$

$$G'' + FG' = 0,$$

$$Y = 0, \quad F = F' = 0, \quad G = 1$$

$$Y \rightarrow \infty, \quad F' \rightarrow 0, \quad G \rightarrow 0.$$

Pour la suite nous supposons a et b linéaires en G

$$a = 1 + A(G - 0,5), \quad b = 1 - B(G - 0,5),$$

ce qui est encore une bonne approximation pour des écarts de température $T_p - T_\infty$ de l'ordre de 20°C dans le cas de l'eau. La solution du système d'équations est alors de la forme $G(Y, P_m, A, B)$, $F(Y, P_m, A, B)$. Le nombre de Nusselt local

$$Nu_{x_1} = G'(0) \left(\frac{3}{4}P_m G_{mx_1}\right)^{1/4}$$

est de la forme

$$Nu_{x_1} = K(P_m, A, B)G_{mx_1}^{1/4}.$$

2. Résolution des équations dans le cas de l'eau

Nous avons résolu les équations à l'aide du calculateur analogique, pour les valeurs de P_m, A, B portées au Tableau 1, qui correspondent aux trois températures $T_m = 20, 30, 50^\circ\text{C}$ et à des écarts $T_p - T_\infty$ de 0, 10, 20°C. Le calcul des paramètres A et B a été réalisé pour que l'approximation linéaire de a et b qui

Tableau 1

T_m (°C)	$P(T_m)$	$T_p - T_\infty$	A	B	$G'(0)$	$F''(0)$
20....	7,03	0	0	0	-0,490	0,96
		10	0,2935	0,2215	-0,498	1,10
		20	0,7081	0,4066	-0,508	1,27
30....	5,45	0	0	0	-0,485	0,95
		10	0,1500	0,1953	-0,492	1,05
		20	0,3398	0,3614	-0,499	1,17
50....	3,59	0	0	0	-0,474	0,93
		10	0,0734	0,1565	-0,479	0,99
		20	0,1583	0,2934	-0,484	1,07

est exacte pour $T = T_m$, le soit aussi à la paroi

$$A = \frac{\rho(T_m) - \rho(T_p)}{\rho(T_\infty) - \rho(T_m)} - 1, \quad B = 2 \left(1 - \frac{\mu(T_p)}{\mu(T_m)} \right).$$

Nous avons obtenu les valeurs des conditions à la paroi qui sont portées au Tableau 1 ci-dessous. Les courbes $G(Y)$ tracées par la machine sont pratiquement superposées lorsque A et B varient pour un même P_m . Les courbes $F'(Y)$ sont légèrement modifiées: le maximum de F' est pratiquement constant et il correspond à des Y un peu plus faibles lorsque A et B augmentent.

La précision des calculs sur la machine utilisée est meilleure que 1 pour cent. Ainsi nous avons besoin de la troisième décimale de $G'(0)$ portée au Tableau 1, mais elle n'est pas rigoureusement exacte. Pour $P = 7$, $A = B = 0$, les conditions initiales exactes sont $G'(0) = -0,492$ et $F''(0) = 0,965$.

3. Résolution pour l'application à d'autres liquides

Les propriétés physiques des liquides autres que l'eau, pourront en général être caractérisées par P_m , $A = 0$, B . Si on résoud le système d'équations différentielles pour $P_m = 5,45$, $A = 0$, $B = 0,3614$, on obtient $G'(0) = -0,499$, $F''(0) = 1,11$. En comparant aux valeurs du Tableau 1, on voit que A a peu d'influence sur $G'(0)$; on pourra donc utiliser les valeurs portées dans ce tableau pour calculer Nu_{x_1} , même si le liquide n'est pas de l'eau.

Il est possible de réaliser des solutions aqueuses à faible concentration en soluté qui aient cependant une très grande viscosité. De telles solutions seront caractérisées par P_m très grand, A , B . Ainsi il est intéressant de résoudre le système d'équations différentielles pour P_m infini. On obtient les valeurs de $G'(0)$ et $F''(0)$ portées au Tableau 2. On voit que $G'(0)$ dépend toujours peu de A , alors qu'il décroît lorsque B croît, de la même façon que dans le cas des nombres de Prandtl plus faibles. Selon [6], la décroissance de $G'(0)$ en fonction de B doit être très lente pour les faibles valeurs de B .

Tableau 2

A	B	G'(0)	F''(0)
0	0	-0,540	1,08
0	0,3614	-0,558	1,29
0,1500	0,1953	-0,549	1,20
0,3398	0	-0,539	1,13
0,3398	0,3614	-0,557	1,34

V. CONVECTION NATURELLE LAMINAIRE. INFLUENCE D'UNE AMBIANCE NON ISOTHERME

1. Solutions semblables

L'abscisse adimensionnelle x_1 rapportée à L est définie à une constante additive près, x_2 est l'ordonnée correspondante. Les vitesses adimensionnelles u_1 et u_2

sont rapportées à $\sqrt{g\beta L(T_0 - T_1)}$ où T_1 et T_0 sont deux températures de référence.

Supposons les variations de $T_p(x_1)$ et $T_\infty(x_1)$ telles que les expressions correspondantes de

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$$

s'écrivent:

$$\theta_\infty(x_1, x_2 = \infty) = ax_1^q \quad \text{et} \quad \theta_p(x_1, x_2 = 0) = (1+a)x_1^q,$$

où a et q sont des constantes. Posons alors:

$$\theta = \frac{\theta - \theta_\infty}{\theta_p - \theta_\infty} = \frac{T - T_\infty(x_1)}{T_p(x_1) - T_\infty(x_1)}.$$

On est conduit à introduire la fonction de courant adimensionnelle ψ et à définir les variables de similitude par

$$Y = \left(\frac{(q+3)PG_{Lx_1}}{4} \right)^{1/4} \frac{x_2}{x_1}, \quad \theta = G(Y),$$

$$\psi = x_1^{(q+3)/2} G_{Lx_1}^{-1/4} \left(\frac{(q+3)P}{4} \right)^{-3/4} F,$$

où G_{Lx_1} est le nombre de Grashof local à l'abscisse x_1 construit avec Lx_1 et l'écart local $T_p(x_1) - T_\infty(x_1)$ de température entre la paroi et l'infini. Les fonctions F et G sont solutions du système d'équations différentielles

$$G + F''' = \frac{1}{P} \left(2 \frac{q+1}{q+3} F'^2 - FF'' \right),$$

$$G'' = -FG' + \frac{4q}{q+3} F'(a+G),$$

$$Y = 0, \quad F = F' = 0, \quad G = 1,$$

$$Y \rightarrow \infty, \quad F' \rightarrow 0, \quad G \rightarrow 0$$

et le nombre de Nusselt local est donné par

$$Nu_{x_1} = -G'(0) \left(\frac{(q+3)PG_{Lx_1}}{4} \right)^{1/4}.$$

Le paramètre a représente l'amplitude relative des variations de la température à l'infini T_∞ . Dans ce qui suit il sera positif, ainsi que q . On a:

$$a = \frac{T_\infty(x_1) - T_\infty(x'_1)}{(T_p - T_\infty)_{x_1} - (T_p - T_\infty)_{x'_1}}.$$

L'abscisse adimensionnelle réelle x_1 étant comptée à partir du bord d'attaque, on pourra être conduit à utiliser $x'_1 = x_0 + x_1$ dans les applications pour respecter la forme de θ_∞ et de θ_p .

2. Etude de la solution du système pour les grandes valeurs de Y

Supposons que G et F' restent très petits pour des valeurs suffisamment élevées de Y ; on peut alors

Tableau 3. Résolution pour $q = 0,2$

P	a	$F''(0)$	$G'(0)$	F'_{\max}	Y_{\max}	G_{\min}	Y_{\min}
7....	0,0	0,924	-0,546	0,563	1,55	0,0	∞
	0,2	0,884	-0,565	0,512	1,44	-0,011	4,52
	1,0	0,78 ₁	-0,62 ₄	0,41 ₁	1,2 ₈	-0,03 ₀	3,9 ₀
100....	0,0	1,00	-0,581	0,714	2,08	0,0	∞
	0,1	0,943	-0,581	0,605	1,70	-0,014	4,36
	0,2	0,913	-0,586	0,558	1,59	-0,022	4,15
	1,0	0,800	-0,637	0,417	1,30	-0,045	3,64
∞	0,0	1,036	-0,595	0,825	∞	0,0	∞
	0,2	0,915	-0,588	0,563	1,60	-0,023	4,14

linéariser le système et obtenir :

$$F^{\text{IV}} + F^{\text{IV}} f_{\infty} \left(1 + \frac{1}{P}\right) + \frac{f_{\infty}^2}{P} F''' + \frac{4qa}{q+3} F' = 0$$

où la constante f_{∞} représente la valeur de F lorsque Y est grand.

On peut chercher la solution de cette équation en écrivant F' sous la forme d'une somme de fonctions exponentielles $\exp(\alpha Y)$. Il suffit alors d'étudier les racines de l'équation $Z(\alpha) = 0$, Z étant le polynôme obtenu en remplaçant $F^{(n)}$ par α^{n-1} dans le premier membre de l'équation ci-dessus.

Si $(4qa)/(q+3)$ est positif, comme c'est le cas dans les calculs que nous avons faits, $Z(\alpha) = 0$ a toujours deux racines complexes à partie réelle positive, mais n'a pas de racine réelle positive. Ainsi la solution du système linéarisé est oscillatoire et non amortie quel que soit P , tant que qa diffère de zéro.

Lorsque P tend vers l'infini et que $\varepsilon = 4qa/((q+3)f_{\infty})$ reste petit devant 1, l'équation a deux racines réelles

négatives et des racines complexes dont la valeur approchée est $0,5e^{1/3}(1 \pm i\sqrt{3})$. Ainsi la période des oscillations lorsque $q = a = 0,2$ est d'environ 29, f_{∞} étant de l'ordre de 3,1.

On peut montrer, de façon analogue, que la solution calculée est très sensible à une faible erreur sur les conditions initiales. Cette dernière donne lieu à l'infini des Y à une erreur dont l'amplitude croît exponentiellement, et qui oscille avec la même période que la solution exacte.

3. Résolution numérique

Le système a été résolu sur ordinateur par itérations successives, ou par la méthode de Runge-Kutta. On l'a aussi résolu avec une moindre précision sur calculateur analogique Analac pour $P = 7$. Tous les résultats sont cohérents. Ceux obtenus pour $q = 0,2$ ont été rassemblés dans le Tableau 3, et on a reporté Figs. 3 et 4 des courbes tracées au calculateur analogique.

Lorsque a est différent de zéro, la température réduite

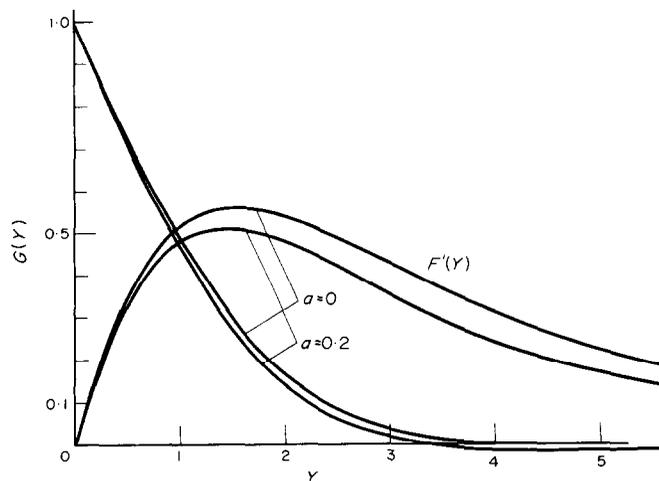


FIG. 3. Tracé au calculateur analogique des température et vitesse réduites pour $P = 7$ et $q = 0,2$.

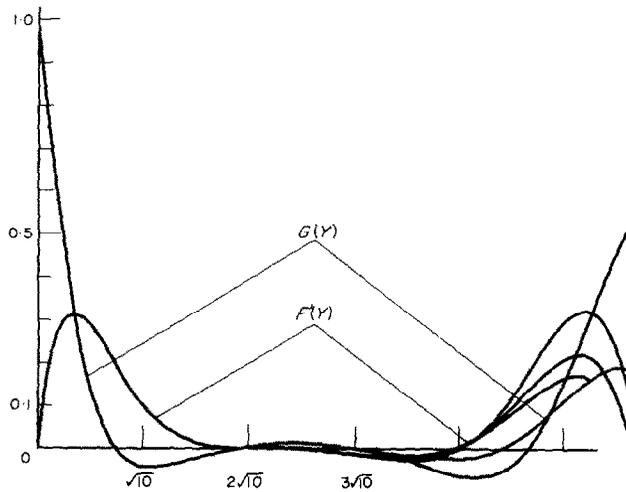


FIG. 4. Tracé au calculateur analogique des température et vitesse réduites pour $P = 7$; $q = 0,55$ et $a = 1$. Aux grandes valeurs de Y les tracés successifs pour les mêmes valeurs initiales donnent des résultats variables.

G s'annule et devient négative, avant de passer par un minimum G_{\min} pour $Y = Y_{\min}$, puis de croître à nouveau en tendant vers zéro. La fonction F' qui représente la vitesse réduite passe par un maximum F'_{\max} pour $Y = Y_{\max}$, puis elle décroît vers zéro. Pour les très grandes valeurs de Y toutes les fonctions calculées oscillent autour de zéro, avec une amplitude croissante. Lorsque $q = a = 0,2$ et $P = 100$ l'amplitude est presque nulle pour $Y = 30$, la période des oscillations est de l'ordre de 30, donc en accord avec l'étude asymptotique à P infini.

4. Résultats expérimentaux dans l'eau

On donne Fig. 5 les résultats obtenus dans un essai où on a créé volontairement un gradient vertical de température en réglant le réfrigérant de sorte qu'il soit insuffisamment efficace.

On a des écarts de température entre la paroi et Y_{\min} de 1,87 et 2,15°C aux abscisses $Lx_1 = 0,166$ et 0,266 m respectivement. On peut estimer $q = 0,56$; $a \approx 1,1$ et $x_0 \approx 0,25$. Si on accepte cette correction d'abscisse très élevée, on trouve des nombres de Grashof locaux de 2,60 et $7,03 \cdot 10^8$, le nombre de

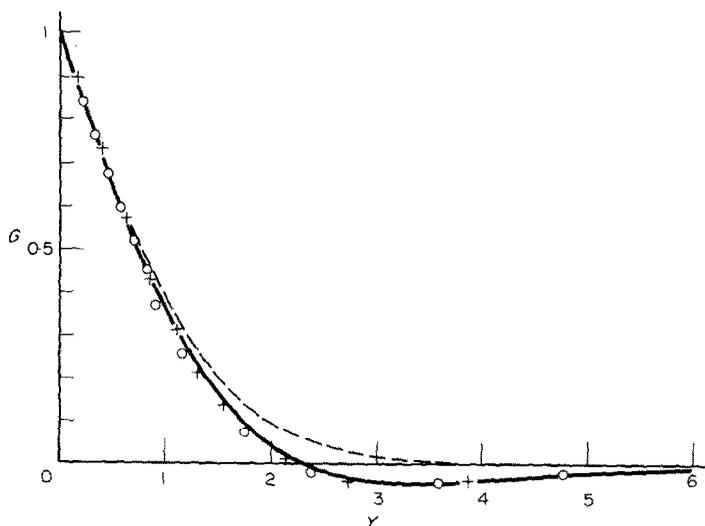


FIG. 5. + $Lx_1 = 0,266$, O $Lx_1 = 0,166$; — Courbe théorique $q = 0,55$, $a = 1$, $P = 7$; --- Courbe théorique $q = 0,55$, $a = 0$, $P = 5,4$ avec abscisses divisées par 1,17.

Prandtl étant de 5,4. De plus, on observe un bon accord des profils de température expérimentaux avec la courbe théorique tracée sur la figure pour $P = 7$, $a = 1$, $q = 0,55$ et qui est sensiblement correcte car les écarts sur a et P se compensent.

Pour calculer x_0 à partir de la température en 3 points ($x_1 = 0,2; 0,4; 0,6$) il est commode de commencer par tabuler la fonction :

$$Z(x_0) = \frac{\log \frac{x_0 + 0,6}{x_0 + 0,2}}{\log \frac{x_0 + 0,6}{x_0 + 0,4}}$$

On peut essayer d'interpréter les mesures en ignorant les variations de $T_\infty(x)$, et la correction d'abscisse Lx_0 . Pour cela on a porté sur la Fig. la courbe théorique $q = 0,55$; $a = 0$; $P = 5,4$, en divisant ses abscisses par 1,17, ce qui correspond à $Lx_1 = 0,166$ m, le plus favorable des deux profils qui ne sont plus superposés, de façon à ne pas avoir à reporter les points expérimentaux. On voit qu'il subsiste un désaccord sur la pente à l'origine de l'ordre de 4 pour cent. Ce désaccord peut être estompé si on fait abstraction des points aux grandes valeurs de Y et que l'on prend pour T_∞ la valeur de T à Y_{\min} .

On voit donc que le plus souvent on pourra ignorer les variations de T_∞ dans les expériences, à condition de prendre pour T_∞ la valeur de T à Y_{\min} .

À l'issue de ce travail nous avons eu connaissance d'un article de R. Eichorn [14] qui résoud par un développement en série de fonctions le cas particulier $q = 1$, $a = -1$ (T_p constante, $\partial T_\infty / \partial x_1$ constant). Il donne des résultats numériques pour divers nombres de Prandtl, qui montrent aussi que la température réduite G peut devenir négative.

VI. LA ZONE DE TRANSITION EN CONVECTION NATURELLE

1. Les paramètres du problème

On est à la limite inférieure (LT) ou à la limite supérieure (TT) suivant x_1 de la zone de transition lorsqu'il existe une certaine relation entre les divers paramètres adimensionnels de l'écoulement.

Nous considérons ici ce qui peut intervenir :

- le nombre de Grashof local G_{x_1}
- le nombre de Prandtl P
- la répartition des températures de surface selon x_1 , soit q si elles sont en x_1^q , en laminaire
- la répartition des températures du fluide libre, sur une verticale, soit a comme au chapitre V
- la variation des propriétés physiques due à l'importance des écarts de température $T_p - T_\infty$ représentée par plusieurs paramètres M .

Nous écrivons la relation cherchée sous la forme :

$$Ra(x_1)_x = (PG_{x_1})_\infty = f(P_\infty, q, a, M)$$

l'indice ∞ indiquant que les propriétés sont calculées à la température du fluide libre. C'est l'expérience aux nombres de Prandtl d'ordre supérieur à 1 qui suggère de considérer le nombre de Rayleigh $Ra(x_1)$ local, parce que le plus souvent les nombres de Prandtl et de Grashof se manifestent par leur produit.

Il est nécessaire de préciser la forme de l'ensemble des paramètres M . Ainsi pour les gaz les variations de propriétés physiques se manifestent par l'intermédiaire de $\mu(T)/\mu(T_\infty)$ dans l'équation des quantités de mouvement, de $\lambda(T)/\lambda(T_\infty)$ dans l'équation de l'énergie et par l'intermédiaire de $\rho(T_\infty)/\rho(T)$ dans toutes les équations. En général on prend :

$$\frac{\lambda(T)}{\lambda(T_\infty)} = \frac{\mu(T)}{\mu(T_\infty)} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^m = \frac{\rho(T_\infty)}{\rho(T)} = \frac{T}{T_\infty}$$

soit lorsque les écarts de température restent modérés :

$$\frac{\lambda(T)}{\lambda(T_\infty)} = \frac{\mu(T)}{\mu(T_\infty)} \simeq 1 + m \frac{T_p - T_\infty}{T_\infty} \theta \quad \frac{\rho(T_\infty)}{\rho(T)} \simeq 1 + \frac{T_p - T_\infty}{T_\infty} \theta$$

où θ est la température réduite $T - T_\infty / T_p - T_\infty$. C'est-à-dire que M représente les paramètres m et $T_p - T_\infty / T_\infty$, ainsi que les formes réduites des lois de variation des propriétés physiques.

Pour les liquides on fait intervenir $\mu(T)/\mu(T_\infty)$. Avec l'eau il faut considérer également $\beta(T, T_\infty)/\beta(T_\infty)$ comme on l'a vu chapitre II. Lorsque $T_p - T_\infty$ reste modéré on peut supposer que ces paramètres s'expriment linéairement en fonction de la température réduite θ . Ainsi M représente les paramètres :

$$\frac{\mu(T_p) - \mu(T_\infty)}{\mu(T_\infty)} \quad \text{et} \quad \frac{\beta(T_p, T_\infty)}{\beta(T_\infty)} - 1$$

et les formes réduites des lois de variation des propriétés physiques.

L'intérêt de ces linéarisations est que la forme littérale de la divergence du tenseur des contraintes est la même pour un gaz et un liquide, à propriétés physiques variables. Par conséquent, lorsque les écarts de température restent faibles, l'influence des variations de viscosité avec la température peut être représentée par le même paramètre M_0 , qui se calcule à l'aide de :

$$M_0 = m \frac{T_p - T_\infty}{T_\infty}$$

pour les gaz ($m = 0,768$ pour l'air)

$$M_0 = \frac{\mu(T_p) - \mu(T_\infty)}{\mu(T_\infty)}$$

pour les liquides.

Par contre, l'influence des variations de ρ pour les gaz, de β pour les liquides n'ont rien à voir l'une avec l'autre, et si on veut en tenir compte il faut *a priori* traiter séparément le cas des gaz et celui des liquides, qui répondent à des équations différentes de leur point de vue, même pour les faibles écarts de température.

Des calculs [16] numériques sur l'influence des variations de viscosité avec la température en convection forcée, montrent qu'on a une stabilisation dans les liquides et une déstabilisation dans l'air. Il sera intéressant de comparer ceci aux expériences de convection naturelle.

Parmi les paramètres adimensionnels il faudrait encore introduire les sources extérieures de perturbation, la forme du bord d'attaque, l'état de surface de la plaque chauffante, et peut-être un paramètre habituellement négligé en convection naturelle [15]

$$B = \frac{g(Lx_1)}{C_p(T_p - T_\infty)}$$

Ils ont la particularité d'être sans influence évidente, ou d'être difficiles à chiffrer dans les expériences courantes.

2. Interprétation des résultats des auteurs

(a) *Essais sur l'air* [9]. Nous avons utilisé le graphique de la Fig. 6 page 14 de ce rapport. Sur l'ensemble des résultats on voit que les nombres de Rayleigh critiques décroissent quand $T_p - T_\infty$ croît. Il est assez délicat d'estimer où se situe exactement la transition au vu du graphique. Nous avons quand même essayé d'utiliser deux des essais pour avoir *LT* et *TT*. On a lu et calculé les résultats portés Tableau 4.

(b) *Essai sur l'eau le long d'une plaque verticale à flux constant* [3]. Nous avons utilisé les relevés de $T_p - T_\infty$ de la page 521 qui nous ont permis de calculer les paramètres adimensionnels pour *TT* et *LT* à la fois, que nous avons portés au Tableau 5.

L'auteur ne donne pas les relevés de $T_\infty(x_1)$ mais on peut penser que a est faible au moins pour les écarts $T_p - T_\infty$ les plus petits. L'allure générale des courbes donnant le nombre de Nusselt en fonction d'un nombre de Rayleigh modifié (Fig. 7(a), page 522) indique que la transition se produit à des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh habituel, calculé à la température de film, quand $T_p - T_\infty$ augmente, soit une évolution inverse de celle observée pour les gaz.

Tableau 4

$(T_p - T_\infty)^\circ\text{C}$	M_0	$Ra(x_1)$	$B \times 10^5$	P	q	a	m
63,5	0,163	<i>LT</i> 3,1.10 ⁹ <i>TT</i> 8,7.10 ⁹	12	0,7	0,2	≈ 0	0,768
88,5	0,227	<i>LT</i> 2,2.10 ⁹ <i>TT</i> 5,9.10 ⁹	7	0,7	0,2	≈ 0	0,768

Tableau 5

Essai	$\frac{LT}{TT}$	$(T_p - T_\infty)_{x_1}^\circ\text{C}$	M_0	$Ra(x_1)_\infty \times 10^{-9}$	T_∞	q	$B \times 10^5$
V_3	<i>LT</i>	7,66	-0,15	39	23,9	0,2	20
	<i>TT</i>	4,97	-0,10	44,5			37
V_2	<i>LT</i>	24,07	-0,38	33,2	23,9	0,2	4
	<i>TT</i>	14,81	-0,27	58,9			9,5
V_5	<i>LT</i>	36,20	-0,45	35,9	33,3	0,2	2,1
	<i>TT</i>	21,89	-0,32	110			6
V_9	<i>LT</i>	52,19	-0,58	28,8	25,6	0,2	1,4
	<i>TT</i>	31,90	-0,45	86,9			3,8
V_7	<i>LT</i>				20,5	0,2	
	<i>TT</i>	52,27	-0,61	60,2			1,9

Tableau 6

Essai		T_∞ °C	$(T_p - T_\infty)$ °C	M_0	$Ra(x_1)_\infty \times 10^{-9}$	q
eau Fig. 5(a)	LT	26	27	-0,40	6,3	0
	TT	26	27	-0,4	36,7	
eau Fig. 5(b)	LT	36	33	-0,42	13,0	0,2
	TT	36	23	-0,33	49,6	
eau Fig. 8(b) \triangle	LT	35	34	-0,43	23,5	0,2
eau Fig. 8(a) \circ	LT	16	10	-0,21	9,4	0
	TT	16	10	-0,21	27,4	
∇	LT	44	71	-0,35	20	0
	TT	44	71		45	
Spindle oil \circ Fig. 9(a) ($P_\infty = 170$)	LT	23	34	-0,53	39	0
Mobiltherm \diamond Fig. 10(a) ($P_\infty = 500$)	LT	45	77	-0,9	36,3	0
	TT	45	77	-0,9	74	

On peut également remarquer que pour les faibles $T_p - T_\infty$ les valeurs de Ra pour LT et pour TT deviennent voisines.

Un essai (V_6) avec un fil horizontal de 9,5 mm de diamètre placé contre la plaque montre la grande influence que cette perturbation peut avoir: la transition LT et TT commence beaucoup plus tôt. D'autres essais avec de l'eau froide ou de l'eau chaude (Figs. 7(b) et 7(c), page 523) ont été faits pour préciser l'influence du nombre de Prandtl: avec l'eau froide la transition aurait lieu nettement plus tôt, au contraire avec l'eau chaude elle aurait lieu à peu près comme à température ambiante. A notre avis ceci n'a rien à voir avec une influence de P sur $Ra(x_1)_\infty$, mais est peut-être lié à l'influence des variations de β avec la température, si tous les autres paramètres de l'expérience ont bien été maîtrisés par l'auteur.

Celui-ci affirme page 524 que la stratification du fluide est stabilisante, ce qui peut être considéré comme en opposition avec d'autres études comme nous le verrons plus loin.

(c) *Essais le long d'un cylindre vertical* [8]. Ces essais ont été faits avec un cylindre chauffant de 82 mm de diamètre et de 1 m de haut et la courbure du cylindre a peut-être une influence sur la transition. On peut remarquer aussi que l'enceinte qui contient le liquide n'a que 385 mm de diamètre et de plus qu'il y a un circuit d'eau de refroidissement autour et sur toute la hauteur de cette enceinte, ce qui n'est pas favorable pour empêcher la stratification du fluide, surtout pour les huiles. Néanmoins on dispose dans cet article de

relevés dans l'eau et dans l'huile, à flux ou à température constante qui présentent de l'intérêt. Certains ont été utilisés dans le Tableau 6. On n'a pas pu chiffrer a , bien qu'il intervienne réellement.

L'auteur indique également que $Ra(x_1)_\infty$ doit dépendre fortement de la stratification. Il donne des résultats et une formule dimensionnelle p. 782. On peut en retirer que $Ra(x_1)_\infty$ varie aisément d'un facteur 10 selon le gradient de température réalisé dans le fluide libre.

(d) *Paramètres dégaçés*. On a porté sur la Fig. 6 tous les résultats ainsi obtenus pour la transition LT . Il semble que M_0 soit un paramètre, et que certains des résultats soient plus ou moins exacts. En particulier, il faudrait chiffrer le paramètre a . Chez Vliet où a est plus faible, les Ra_∞ sont plus grands que chez Fujii.

L'influence de q et de P n'est pas évidente.

Les résultats relatifs à la transition TT sont analogues. Ils ont été reportés Fig. 7.

3. Essais avec de l'eau

Nous avons effectué un certain nombre d'essais avec une plaque chauffante en cuivre de 1 cm d'épaisseur, de 0,6 m de large et 1 m de haut dans l'eau [1]. Les différentes zones d'écoulement ont été délimitées d'après la forme du profil de température $T_p(x_1)$.

On a porté Figs. 7 et 8 les variations de $Ra(x_1)_\infty$ ainsi obtenues en fonction de M_0 et de a .

Les résultats sur l'air ont été conservés parce qu'ils semblent en correspondance avec ceux sur les liquides.

On voit que la variation des propriétés physiques

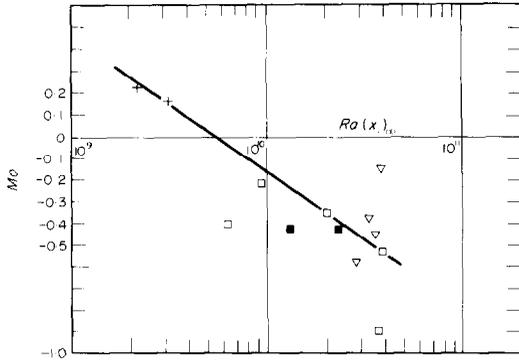


FIG. 6. Transition LT : + air [9]; ∇ eau $q = 0,2$ [3]; \square eau et huile $q = 0$ [8]; \blacksquare eau $q = 0,2$ [8].

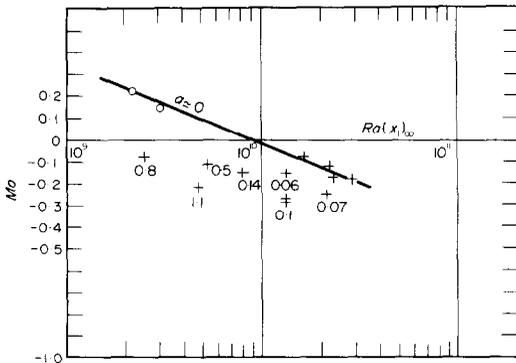


FIG. 7. Transition LT : \circ air [9]; + eau [1] avec a porté en indice auprès de chaque point.

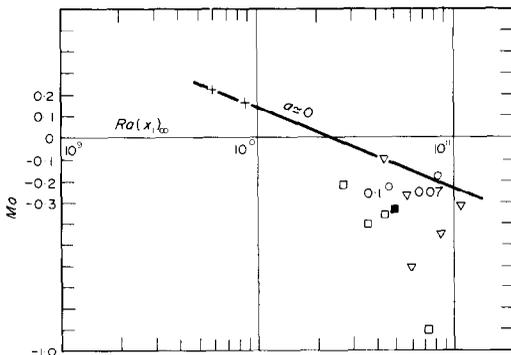


FIG. 8. Transition TT : + air [9]; ∇ eau $q = 0,2$ [3]; \square eau et huile $q = 0$ [8]; \blacksquare eau $q = 0,2$ [8]; \circ eau [1] avec a porté en indice auprès de chacun des deux points.

est stabilisante. Il semble bien que M_0 , qui représente l'influence des variations de viscosité soit le paramètre important de l'ensemble M , pour nos essais. On peut penser que pour des valeurs nettement plus élevées des écarts de température, des paramètres supplémentaires M autres que M_0 doivent intervenir, et que la décroissance du nombre de Rayleigh avec M_0 doit s'atténuer.

On voit également que le gradient de température dans le fluide libre est au contraire déstabilisant, comme on pouvait s'y attendre.

Dans nos essais la surface plane chauffante n'est pas parfaitement lisse, il y a des petites aspérités de chrome et des joints entre les plaques. Il est bien difficile de dire quel est le rôle de ces imperfections. On peut penser qu'il est faible, et qu'elles nous ont permis en fait d'avoir une transition normale, non retardée. On sait en effet qu'en supprimant toutes les perturbations des écoulements, on peut retarder la transition.

Lorsque les perturbations sont importantes, on peut également penser qu'il existe, comme dans les écoulements forcés, un nombre de Rayleigh critique inférieur. Mais si ce nombre existe, il n'a pas l'intérêt pratique du nombre de Reynolds critique des écoulements forcés, parce qu'il ne correspond sans doute pas aux conditions usuelles.

VII. CONCLUSION

Nous avons donc établi l'influence des variations de propriétés physiques et celle de la stratification. Nous avons démontré la réalité de l'existence d'un minimum dans la répartition des températures sur une horizontale, lorsqu'il y a stratification. D'après nos essais avec l'eau ces deux phénomènes semblent avoir une grande importance dans l'apparition de la transition.

Toutefois il reste nécessaire que d'autres essais sur la transition soient effectués avec des fluides allant des gaz aux liquides à grand nombre de Prandtl; et pour séparer les paramètres, avec des fluides dont les propriétés physiques varient peu avec la température. Soulignons que la conception des installations expérimentales est délicate, si on veut parfaitement contrôler l'écoulement.

Enfin nous avons cherché une interprétation de nos propres résultats sur la transition d'après nos calculs en laminaire. Nous avons remarqué qu'une plus grande stabilité, c'est-à-dire l'apparition de la transition pour un plus grand nombre de Rayleigh correspond toujours à un phénomène accélérateur de l'écoulement au voisinage de la paroi: dans les gaz la variation des propriétés physiques décélère l'écoulement et semble déstabilisante, dans les liquides elle accélère l'écoulement et semble stabilisante, la stratification décélère l'écoulement et est déstabilisante.

REFERENCES

1. J. M. Piau, Convention naturelle stationnaire le long d'une plaque plane verticale dans l'eau et les fluides non-newtoniens, Thèse de doctorat à l'Université Paris VI (1973).
2. R. Cheesewright, Turbulent natural convection from a vertical plane surface, *J. Heat Transfer* **90**, 1-8 (1968).
3. G. C. Vliet et C. K. Liu, An experimental study of turbulent natural convection boundary layers, *J. Heat Transfer* **91**, 517-531 (1969).
4. E. M. Sparrow et J. L. Gregg, Similar solutions for free convection from a non isothermal vertical plate, *J. Heat Transfer* **80**, 379-386 (1958).
5. E. M. Sparrow, Free convection with variable wall temperature, Ph.D. Thesis, Harvard University, Cambridge, Mass. (1956).
6. A. Fortier, Cours du certificat d'hydrodynamique supérieur, Faculté des Sciences, Paris (1961).
7. R. Cheesewright, Natural convection from a plane vertical surface in non-isothermal surroundings, *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 1847-1859 (1967).
8. T. Fujii, M. Takeuchi, M. Fujii, K. Suzuki et H. Uehara, Experiments on natural-convection heat transfer from the outer surface of a vertical cylinder to liquids, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 753 (1970).
9. G. Hugot, M. Jannot et A. Pirovano, Compte-rendu de fin de contrat DGRST n° 69-01-773 (mars 1971).
10. *Handbook of Chemistry and Physics*, The Chemical Rubber Publishing Co. (1962).
11. R. Tufeu, B. Le Neindre, P. Bury et P. Johannin, Mesure de la conductibilité thermique de quelques liquides, *Rev. Gén. Thermique* **76**, 365-377 (1968).
12. J. Poulain, Application de la théorie des groupes de transformation à la réduction du nombre de variables indépendantes d'un système d'équations aux dérivées partielles, Séminaire de Mécanique des Fluides, Laboratoire de Mécanique Expérimentale des Fluides, Faculté des Sciences de Paris (1964-1966).
13. W. F. Ames, Recent developments in the non linear equations of transport processes, *Ind. Engng Chem. Fundls* **8**(3), 522-536 (1969).
14. R. Eichorn, Natural convection in a thermally stratified fluid, *Progress in Heat and Mass Transfer*, Vol. 2, pp. 41-53, Pergamon Press (1969).
15. M. Jannot, G. Mordchelles-Regnier et J. Terpstra, Critère de stabilité d'une couche limite de convection naturelle sur une paroi plane verticale et isotherme, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris* **267A**, 617-620 (1968).
16. E. G. Hauptmann, The influence of temperature dependent viscosity on laminar boundary layer stability, *Int. J. Heat Mass Transfer* **11**, 1049-1052 (1968).

INFLUENCE OF PHYSICAL PROPERTIES VARIATIONS AND OF STRATIFICATION ON NATURAL CONVECTION

Abstract—This paper is about steady natural convection along a vertical flat plate. The influence of stratification and of physical properties variations with temperature have been studied for the laminar flow. The equations are solved for the case of liquids; experiments were carried out with water.

Transition to turbulent convection has been studied experimentally. The influence of the variations of viscosity with temperature and that of stratification on the critical Rayleigh number are emphasized.

A possible explanation of these influences is given both for liquids and gases.

EINFLUSS DER ÄNDERUNGEN DER PHYSIKALISCHEN STOFFWERTE UND DER AUSRICHTUNG BEI NATÜRLICHER KONVEKTION

Zusammenfassung—Dieser Artikel behandelt die natürliche Konvektion entlang einer ebenen vertikalen Platte. Im Falle laminarer Strömung wurde der Einfluß der Änderungen der physikalischen Eigenschaften mit der Temperatur und der Einfluß der Ausrichtung der Strömung untersucht. Die Rechnungen wurden für Flüssigkeiten ausgeführt; bei den Versuchen wurde Wasser verwendet.

Der Übergang zu turbulenter Strömung wurde experimentell untersucht. Es wird der Einfluß der Änderungen der Viskosität mit der Temperatur gezeigt und ebenfalls der Einfluß der Ausrichtung der Strömung auf die kritische Rayleigh-Zahl. Es wurde versucht, diesen Einfluß sowohl für Flüssigkeiten als auch für Gase zu deuten.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ И СТРАТИФИКАЦИИ НА ЕСТЕСТВЕННУЮ КОНВЕКЦИЮ

Аннотация— В статье рассматривается естественная конвекция вдоль вертикальной плоской пластины. Изучено влияние на конвекцию изменения физических свойств, связанного с изменением температуры, и влияние стратификации при ламинарном режиме. Проведенные расчёты относятся к несжимаемой жидкости. Опыты производились с водой.

Переход к турбулентному режиму изучен экспериментально. Обнаружено влияние переменной вязкости, а также стратификации жидкости на критическое число Рейля. Дается интерпретация этого влияния одновременно для жидкости и газа.